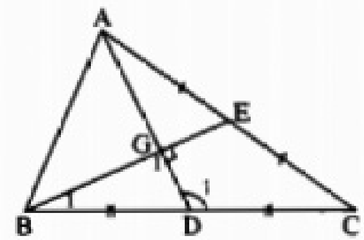
Bài tập bổ sung

III.1. Vì đường cao và đường trung tuyến xuất phát từ cùng một đỉnh lần lượt là đường vuông góc và đường xiên kẻ từ cùng một điểm đến cùng một đường thẳng nên ta có điều phải chứng minh.

III.2. (h.bs.31)

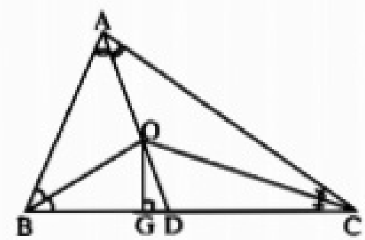
$BC < 2AC$ nếu $\frac{1}{2}BC = CD < AC$.



Hình bs.31

Xét tam giác ADC. Có $\widehat{D_1} = \widehat{G_1} + \widehat{B_1}$. Theo giả thiết $\widehat{G_1} = 90^o$ nên $\widehat{D_1}$ là góc tù. Cạnh AC đối diện với góc D_1 nên là cạnh lớn nhất, vậy $AC > DC$ hay $2AC > 2DC = BC$.

III.3. (h.bs.32)



Hình bs.32

Để chứng minh $\widehat{BOG} = \widehat{COD}$, ta chứng minh $\widehat{BOD} = \widehat{GOC}$. Xét tam giác OAB, ta có $\widehat{BOD} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B}) = \frac{1}{2}(180^o - \widehat{C})$. (1)

Xét tam giác vuông OCG, ta có

$$\widehat{GOC} = 90^o - \frac{1}{2}\widehat{C} = \frac{1}{2}(180^o - \widehat{C}). \quad (2)$$

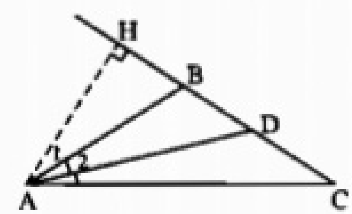
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BOD} = \widehat{GOC}$. Vậy $\widehat{BOG} = \widehat{COD}$.

III.4. (h.bs.33)

Xét tam giác vuông AHB. Ta có

$\widehat{ABH} = 180^o - 112^o = 68^o$;

$\widehat{A}_1 = 90^o - \widehat{ABH} = 90^o - 68^o = 22^o$.



Hình bs.23

Tam giác ABC cân tại B có $\widehat{B} = 112^o$ nên $\widehat{BAC} = (180^o - 112^o) : 2 = 34^o$.

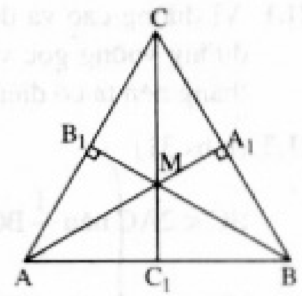
Do đó $\widehat{A}_2 = 34^o : 2 = 17^o$. Từ đó suy ra

$\widehat{HAD} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 22^o + 17^o = 39^o$;

$\widehat{HDA} = 90^o - \widehat{HAD} = 90^o - 39^o = 51^o$.

III.5. (h.bs.34)

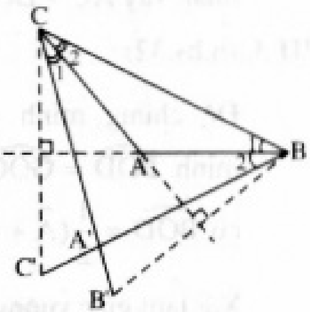
Gọi giao điểm của CM và AB là C_1. Ta cần chứng minh $CC_1 \perp AB$ và C_1 là trung điểm của đoạn thẳng AB. Vì trong một tam giác ba đường cao đồng quy nên CM hay CC_1 vuông góc với AB. Hai tam giác vuông CC_1A và CC_1B bằng nhau vì có $\hat{A} = \hat{B}$, CA = CB nên $C_1A = C_1B$, hay C_1 là trung điểm của AB. Vậy MC là đường trung trực của đoạn thẳng AB.



Hình bs.34

III.6. (h.bs.35)

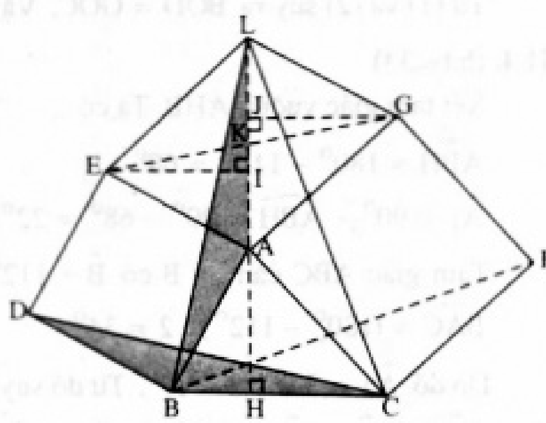
Xét tam giác A'BC. Vì AC là đường trung trực của BB' nên có $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$. Vì AB là đường trung trực của CC' nên $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Suy ra AB, AC lần lượt là đường phân giác của các góc A'BC và A'CB. Vậy ba đường phân giác của tam giác A'BC đồng quy tại A, hay A là điểm nằm trong tam giác A'BC và cách đều ba cạnh của tam giác này.



Hình bs.35

III.7. (h.bs.36)

a) Hai tam giác vuông ABH và EAI bằng nhau vì có AB = EA, $\widehat{BAH} = \widehat{AEI}$ (cùng phụ với góc EAI). Tương tự hai tam giác vuông ACH và GAJ bằng nhau. Suy ra EI = AH = GJ. Mặt khác, $\widehat{JKG} = \widehat{IKE}$ (đối đỉnh), do đó $\Delta EKI = \Delta GKJ$. Từ đó ta có EK = GK, hay K là trung điểm của EG. Vậy AK là trung tuyến của tam giác AEG.



Hình bs.36

b) Theo a) $\Delta EKI = \Delta GKJ$ nên KI = KJ. Mặt khác, theo giả thiết K là trung điểm của AL nên AI = LJ. Ta có

$$AL = AJ + JL = AJ + AI = HC + HB = BC.$$

c) Hai tam giác ALB và BCD bằng nhau và có AL = BC, AB = BD và $\widehat{BAL} = 90^o + \widehat{EAL} = 90^o + \widehat{ABC} = \widehat{DBC}$.

Suy ra $\widehat{ALB} = \widehat{BCD}$. Mặt khác ta có $\widehat{ALB} + \widehat{LBH} = 90^o$ nên $\widehat{BCD} + \widehat{LBH} = 90^o$, suy ra $LB \perp CD$, tức CD là một đường cao của tam giác LBC.

d) Lập luận tương tự câu c), ta có BF là một đường cao của tam giác LBC.

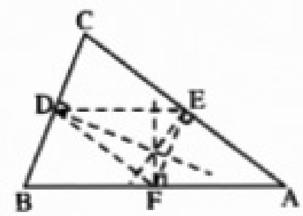
Vậy ba đường thẳng AH, BF, CD là ba đường cao của tam giác LBC nên chúng đồng quy.

III.8. (h.bs.37)

a) Ta có $\Delta BDF = \Delta EFD$ (g.c.g).

Suy ra BD = EF. Theo giả thiết, D là trung điểm của BC nên CD = DB = EF.

Hai tam giác CDE và EFA bằng nhau vì CD = EF, $\widehat{CDE} = \widehat{CBA} = \widehat{EFA}$ và $\widehat{ECD} = \widehat{AEF}$ (các góc đồng vị). Suy ra CE = EA.



Hình bs.37

b) Gọi D là trung điểm của BC, E là trung điểm của AC. Theo câu a) đường thẳng qua D, song song với AB phải cắt AC tại trung điểm của AC nên đường thẳng đó phải đi qua E, hay DE//AB.

c) Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Đường trung trực của BC phải vuông góc với EF (vì EF//BC), hay nó là một đường cao của tam giác DEF. Suy ra ba đường trung trực của tam giác ABC là ba đường cao của tam giác DEF. Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (giao điểm của ba đường trung trực của tam giác ABC) là trực tâm của tam giác DEF.